Inégalité de CARLEMAN

[FRANCINOU-GINAELLA-NICOLAS 1, p 208]

ÉNONCÉ :

Théorème : Pour toute série convergente à termes positifs $\sum a_n$, on a :

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq e \sum_{n\geq 1} a_n$$

De plus , cette inégalité est optimale.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME (**Inégalité arithmético-géométrique**) :

Pour $n \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Démonstration. La stricte concavité de la fonction ln donne :

$$ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln(x_k) = ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Par croissance de la fonction exponentielle et en l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité, on obtient le résultat. □

Démonstration. (*théorème*) : En vertu de l'inégalité arithmético-géométrique, on a, pour $n \geq 1$:

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = \frac{\sqrt[n]{a_1(2a_2)\dots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} ka_k$$

Réécrivons le dernier terme :

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} \frac{ka_k}{n(n+1)}$$

Considérons la famille $(v_{k,n})_{k,n\geq 1}$ définie par $v_{k,n} = \frac{ka_k}{n(n+1)}$ pour $1 \leq k \leq n$ et 0 sinon. Elle est sommable. En effet, les termes sont positifs et pour k fixé :

$$\sum_{n\geq 1} v_{k,n} = \sum_{n\geq k} v_{k,n} = ka_k\frac{1}{k} = a_k$$

qui est le terme général d'une série convergence.
En vertu de la formule de STIRLING, on a que :

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e$$

Par conséquent, il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq C$.
Ainsi, pour $N \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} &\leq \sum_{n=1}^{N} C \sum_{k=1}^{n} v_{k,n} \leq C \sum_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} v_{k,n} \\ &\leq C \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} v_{k,n} = C \sum_{k\geq 1} a_k\end{aligned}$$

La série étant à termes positifs, elle converge et on a l'inégalité :

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq C \sum_{n\geq 1} a_n$$

On a les équivalences suivantes :

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq e \Longleftrightarrow ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln(k)$$
$$\Longleftrightarrow (n+1)ln(n+1) - n \leq \sum_{k=1}^{n=1} ln(k)$$

Or pour $2 \leq k \leq n+1$, on a $ln(k) \geq \int_{k-1}^{k} ln(x)dx$, d'où

$$\sum_{k=1}^{n+1} ln(k) = \sum_{k=2}^{n+1} ln(k) \geq \int_{1}^{n+1} ln(x)dx$$

Or $\int_1^{n+1} ln(x)dx = (n+1)ln(n+1) - n$, donc la constante $C = e$ convient.

Voyons qu'elle est optimale. Soit C une constante réalisant l'inégalité. Considérons $a_k = \frac{1}{k}$ pour $1 \leq k \leq N$ et $a_k = 0$ pour $k > N$. Ainsi, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq C \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} Cln(N)$$

tandis que $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$ est le terme générale d'une série divergente. Par conséquent, la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ est équivalente à $\sum_{n=1}^{N} \frac{e}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} eln(N)$ d'où $e \leq C$, d'où le résultat. □

Remarques :

- On utilise le fait que $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ qui n'est pas trivial ! Il faut considérer $a_n = \frac{n!}{n^n}$ et utiliser la propriété suivante : *De toute suite (u_n) de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{\to+\infty}{\to} \ell$.*
- Il faut être à l'aise avec les équivalents classiques et savoir rapidement les remontrer.
- La positivé des termes (a_n) est nécessaire : d'une part pour appliquer l'inégalité arithmético-géométrique, d'autre part pour la sommabilité de la famille $(v_{k,n})_{k,n\geq 1}$.